ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΑΛΓΕΒΡΑ / Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**01 / 11 / 2025**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Σελ.62, σχολ. βιβλίο

Α₂. Σελ. 63, σχολ. βιβλίο

Α₃. $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$.

Α₄. **α.** Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β₁. $A=\frac{x^{-12}y^3\cdot x^{15}}{y^6\cdot y^{-3}}=\frac{x^3y^3}{y^3}=x^3$, οπότε για $x=\frac{1}{10}$ έχουμε: $A=\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{1^3}{10^3}=\frac{1}{1000}$.

Β₂. (i) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$
$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$
$=2\alpha\beta+2\alpha\beta=4\alpha\beta$

(ii) $(2\alpha-5)^2-4(\alpha-2)(\alpha+2)+20\alpha=4\alpha^2-20\alpha+25-4(\alpha^2-4)+20\alpha$
$=4\alpha^2+25-4\alpha^2+16=41$

(iii) $\alpha^2-(\alpha-\beta)^2+\beta^2=\alpha^2-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+\beta^2$
$=\alpha^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2+\beta^2=2\alpha\beta$

Β₃. $A=\frac{x(x-4)+4}{(x+1)(x-2)}=\frac{x^2-4x+4}{(x+1)(x-2)}=\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-2}{x+1}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. (i) $x(x+6)\geq 2(x-2) \Leftrightarrow x^2+6x\geq 2x-4$
$\Leftrightarrow x^2+6x-2x+4\geq 0$
$\Leftrightarrow x^2+4x+4\geq 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2\geq 0$, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(ii) $\alpha^2+\alpha\beta\geq\beta(3\alpha-\beta)\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha\beta\geq 3\alpha\beta-\beta^2$
$\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha\beta-3\alpha\beta+\beta^2\geq 0$
$\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0$
$\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq 0$, ισχύει για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Γ₂. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με το α>0, προκύπτει:

$\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4\Leftrightarrow\alpha^2+4\geq 4\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-4\alpha+4\geq 0\Leftrightarrow(\alpha-2)^2\geq 0$, ισχύει για κάθε $\alpha>0$.

Γ₃. Ισχύει ότι $1<x<3$ (1) και $2<y<7$ (2).

(i) $2<y<7 \Leftrightarrow 10<5y<35$ (3).

Άρα, με πρόσθεση κατά μέλη, των (1) και (3), έχουμε:

$$1+10<x+5y<3+35 \Leftrightarrow 11<x+5y<38$$

(ii) $1<x<3 \Leftrightarrow -1>-x>-3$

$$\Leftrightarrow -3<-x<-1$$
$$\Leftrightarrow -3-3<-x-3<-1-3$$
$$\Leftrightarrow -6<-x-3<-4$$

(iii) $1<x<3 \Leftrightarrow 2<2x<6$ (4)

$2<y<7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{y}>\frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{7}<\frac{1}{y}<\frac{1}{2}$ (5)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, των (4) και (5) έχουμε:

$$\frac{2}{7}<\frac{2x}{y}<\frac{6}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{7}<\frac{2x}{y}<3$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ$_1$. Έχουμε: $K-\Lambda=\alpha^2+\beta^2+9-2(2\alpha+3\beta-2)=\alpha^2+\beta^2+9-4\alpha-6\beta+4=$

$=\alpha^2-4\alpha+4+\beta^2-6\beta+9=(\alpha-2)^2+(\beta-3)^2\geq 0$, ως άθροισμα τετραγώνων .

Δ$_2$. Ισοδύναμα έχουμε:

$K=\Lambda \Leftrightarrow K-\Lambda=0 \overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow} (\alpha-2)^2+(\beta-3)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-2=0$ και $\beta-3=0$.

$\Leftrightarrow \alpha=2$ και $\beta=3$.

Δ$_3$. Εφόσον γ και δ αντίστροφοι, θα ισχύει ότι $\delta+\gamma=0$ ή $\gamma=-\delta$. Συνεπώς:

(i) $\Gamma=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}=\dfrac{2\gamma+3\delta}{2\delta-3\gamma}=\dfrac{2\cdot(-\delta)+3\delta}{2\delta-3\cdot(-\delta)}=\dfrac{-2\delta+3\delta}{2\delta+3\delta}=\dfrac{\delta}{5\delta}=\dfrac{1}{5}$

(ii) $\Delta=\dfrac{\alpha\gamma^2-5\delta^2+\beta\gamma^2}{(\gamma+\delta+1)^{2025}}=\dfrac{2\gamma^2-5\delta^2+3\gamma^2}{(0+1)^{2025}}=\dfrac{5\gamma^2-5\delta^2}{1^{2025}}=\dfrac{5(\gamma^2-\delta^2)}{1}=5(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)=0$.